अध्यायः 7

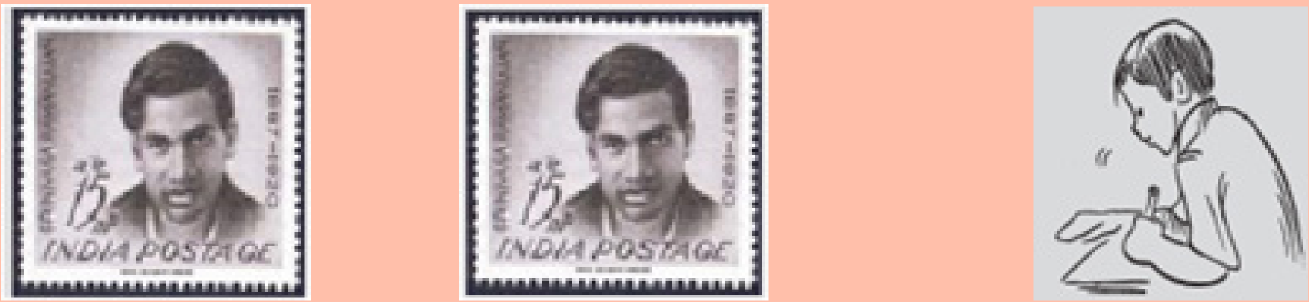
त्रिभुजानां सर्वाङ्गसमता

7.1 भूमिका

अधुना भवन्तः अतीव महत्त्वपूर्णां ज्यामितसङ्कल्पनां 'सर्वाङ्गसमताम्'अधिगम्यमानाः सन्ति। विशेषतया, भवन्तः त्रिभुजानां सर्वाङ्गसमतायाः विषये बहु किमपि पठिष्यन्ति। सर्वाङ्गसमताम् अधिगन्तुं, वयं काश्चन क्रियाः करिष्यामः।

एतान् कुर्वन्तु

एकप्रकारस्य (denomination) चिटिकाद्वयं स्वीकुर्वन्तु (आकृतिः 7.1)। एकां चिटिकाम् अपर चिट्टिकायाः उपरि स्थापयन्तु। भवन्तः किं पश्यन्ति ?

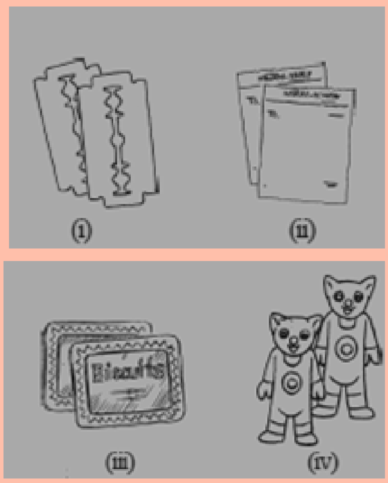


आकृतिः 7.1

एका चिटिका अपरचिटिकां पूर्णतया आवृणोति । अस्य अर्थोऽस्ति यत् चिटिकाद्वयं एकस्य एव आकारस्य एकस्य च एव मापस्य अस्ति। एतादृशानि वस्तूनि 'सर्वाङ्गसमम्' इति कथ्यते। भवद्भिः प्रयुक्ता चिटिकाद्वयं परस्परं सर्वाङ्गसमं वर्तते। सर्वाङ्गसमवस्तूनि अन्योन्यं शतप्रतिशतं प्रतिलिपयः भवन्ति।

किम् अधुना भवन्तु वक्तुं शक्नुन्ति यत् निम्नवस्तूनि सर्वाङ्गसमानि सन्ति अथवा न ?

1. एकस्योद्योगस्य क्षुरपत्रम् [(आकृतिः 7.2 (i))]
2. एकस्य पत्रपुस्तकस्य (लेटर पैड) पृष्ठानि [आकृतिः7.2 (ii)]
3. एकस्यैव (पैकिट) सुपिष्टकानि [आकृतिः 7.2 (iii)]
4. एकस्यैव (साँचा) उपकरेणविशेषेण [आकृतिः 7.2 (iv)]

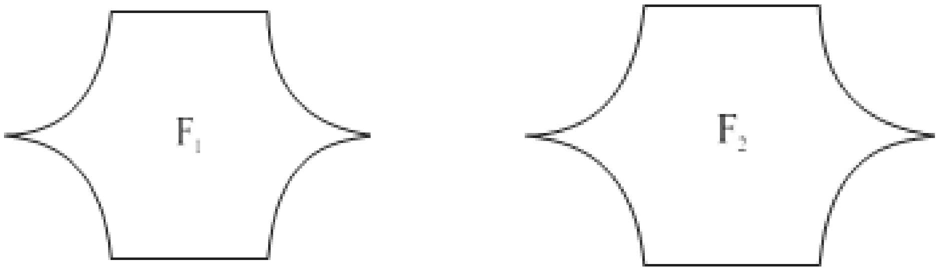


आकृतिः 7.2

द्वयोः वस्तुनोः सर्वाङ्गसमस्य सम्बन्ध-प्रक्रिया 'सर्वाङ्गसमता' इति कथ्यते। अस्मिन् अध्याये, वयं केवलं तले (आधारे) निर्मितानाम् आकृतीनां विषये एव चर्चयिष्यामः यद्यपि सर्वाङ्गसमतायाः एकः साधारणः विषयः अस्ति यस्य उपयोगं वयं त्रि-आयामिभ्यः (3-Dimensional) आकारेभ्यः अपि कुर्मः इदानीं वयं तले निर्मितानाम् एतादृशीनाम् आकृतीनां सर्वाङ्गसमतायाः विधिपूर्वकम् अर्थं ज्ञातुं प्रयतिष्यामहे याः आकृतीः वयं पूर्वतः जानीमः।

7.2 तलाकृतीनां सर्वाङ्गसमता

अत्र आकृतिद्वयं पश्यामः (आकृतिः 7.3)। किम् एतत् आकृतिद्वयं सर्वाङ्गसमम् अस्ति ?



(i) (ii)

आकृतिः 7.3

भवन्तः अध्यारोपणविधेः प्रयोगं कर्तुम् अर्हन्ति। एतयोः मध्ये एकस्याः आकृतेः प्रतिलिपिं (trace-copy) रचयित्वा अपरस्याम् आकृत्याम् स्थापयन्ति। यदि एते आकृत्यौ अन्योन्यं पूर्णतया आवृणुतः तदा ते सर्वाङ्गसमम् इति कथ्यते। द्वितीयप्रकारेण, भवन्तः एतयोः मध्ये एकाम् आकृतिं कर्तयित्वा तां द्वितीयाम् आकृत्यां स्थापयितुं शक्नुवन्ति। किन्तु सावधानम्! याम् आकृतिं भवन्तः कर्तितवन्तः (अथवा प्रतिलिपिं निर्मितवन्तः) तस्याः मोटनस्य आस्तरणस्य च स्वतन्त्रता भवतां कृते नास्ति।

7.3 आकृत्याम् मध्ये,यदि आकृतिः F1, F2 आकृतेः सर्वाङ्गसमम् अस्ति तदा वयं लिखिष्यामः F1 = F2

7.3 रेखाखण्डेषु सर्वाङ्गसमता

द्वौ रेखाखण्डौ कदा सर्वाङ्गसमौ भवतः ? अधः दत्तं रेखाखण्डयोः युग्मद्वयं पश्यन्तु

(ii) (ii)

आकृतिः 7.4

प्रत्येकं रेखाखण्डयुग्मस्य प्रतिलिपिं निर्माय अध्यारोपणविधेः प्रयोगं कुर्वन्तु। आकृतिः7.4(i) $\overline{CD}$ इत्यस्य प्रतिलिपिं रचयित्वा एतं $\overline{AB}$ इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु। भवन्तः पश्यन्ति यत् $\overline{CD}$ इति AB इत्येतं पूर्णतया आवृणोति तथा C, A इति बिन्दौ D.B इति बिन्दौ स्थितः अस्ति। अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् द्वौ रेखाखण्डौ सर्वाङ्समौ स्तः वयं च लेखिष्यामः $\overline{AB} \cong \overline{CD}$।

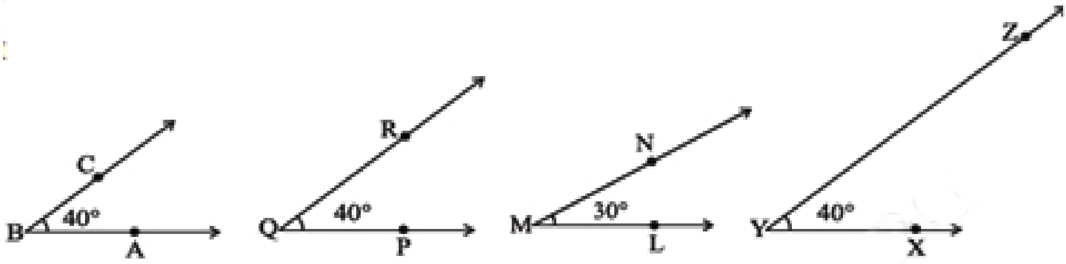
7.4 (ii) आकृतेः रेखाखण्डयुग्माय एतं क्रियाकलापं वारं वारं व्याहरन्तु। किं भवन्तः पश्यन्ति ? एतौ रेखाखण्डौ सर्वाङ्गसमौ न स्तः। एतत् कथं भवन्तः ज्ञातवन्तः ? यतोहि यदा एकः रेखाखण्डः द्वितीयस्य उपरि स्थाप्यते तदा तौ अन्योन्यं पूर्णतया न आवृणुतः। आकृतिः 7.4 (i) मध्ये भवद्भिः दृष्टं स्यात् यत् रेखाखण्डयुग्मस्य अन्योन्येन सह सुमेलनम् (matching) भवति यतोहि तयोः रेखाखण्डयोः दीर्घता समाना वर्तते किन्तु 7.4 (ii) आकृत्याम् एतादृशी स्थितिः नास्ति।

यदि द्वयोः रेखाखण्डयोः दीर्घता समाना (अर्थात् तुल्या) वर्तते तदा तौ सर्वाङ्गसमौ स्तः। यदि तौ रेखाखण्डौ सर्वाङ्गसमौ स्तः तदा तयोः दीर्घता समाना भवति।

उपरि प्रदत्तं तथ्यम् अवधाने निवेशयन्तः, यदा द्वौ रेखाखण्डौ सर्वाङ्गसमौ भवतः तदा वयं वदामः यत् रेखाखण्डौ तुल्यौ समानौ वा स्तः, वयं च लिखामः AB = CD। (वस्तुतः अस्माकम् अर्थः अस्ति यत् $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ।

7.4 कोणानां सर्वाङ्गसमता

अत्र दत्तान् चतुरः कोणान् पश्यन्तु (आकृतिः 7.5)



(i) (ii) (iii) (iv)

आकृतिः 7.5

$\angle PQR$ इत्यस्य प्रतिलिपिं (अक्स) रचयन्तु एतेन च $\angle ABC$ इत्येतम् आवर्तुं वा प्रयतन्ताम्।

एतदर्थं सर्वप्रथमं Q बिन्दुः, B इत्यस्य उपरि $\overrightarrow{QP}$ इत्येतं च $\overrightarrow{BA}$ इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु। $\overrightarrow{QR}$ कुत्र आगमिष्यति। एषः $\overrightarrow{BC}$ इत्यस्य उपरि भविष्यति।

अनेन प्रकारेण $\angle PQR$ इत्यस्य सुमेलनम् $\angle ABC$ इत्यनेन भवति।

अस्मिन् सुमेलने $\angle ABC$ तथा च $\angle PQR$ सर्वाङ्गसमौ स्तः।

(ध्यानं यच्छन्तु यत् एतयोः सर्माङ्गसमयोः कोणयोः मापः(मापनम्) समानः अस्ति।)

वयं लिखामः $\angle ABC \approx \angle PQR$ (i)

अथवा $m\angle ABC = m\angle PQR$ (अस्यां स्थित्यां परिमाणः 40°विद्यते)

इदानीं भवन्तः $\angle LMN$ इत्यस्य प्रतिलिपिं निर्मान्तु $\angle ABC$ इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु। M इत्येतं B इत्यस्य उपरि तथा च $\overrightarrow{ML}$ इति $\overrightarrow{BA}$ इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु। किं $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BC}$ अस्य उपरि आयाति ? न, अस्यां स्थितौ एवं नास्ति। भवन्तः अपश्यन् यत् $\angle ABC$ एवञ्च $\angle LMN$ परस्परं पूर्णतया न आवृणुतः। अतः एतौ सर्वाङ्गसमौ न स्तः।

(ध्यानं यच्छन्तु $\angle ABC$ तथा च $\angle LMN$ एतयोः परिमाणः समानः नास्ति)

$\angle XYZ$ तथा च $\angle ABC$ अस्मिन् विषये भवन्तः किं कथयिष्यन्ति आकृतिः 7.5 (iv) मध्ये किरण $\overrightarrow{YX}$ तथा च $\overrightarrow{YZ}$ क्रमशः किरणः $\overrightarrow{BA}$ तथा च $\overrightarrow{BC}$ इत्याभ्यां दीर्घा प्रतीयते। अस्य आधारेण भवन्तः विचारयितुं शक्नुवन्ति यत् $\angle ABC$, $\angle XYZ$ इत्यस्मात् लघुः वर्तते। परञ्च स्मरन्तु यत् आकृत्यां किरणः केवलं दिशम् एव प्रदर्शयति न तु दीर्घताम्। भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् उभौ कोणौ अपि सर्वाङ्गसमौ स्तः।

वयं लिखामः $\angle ABC \cong \angle XYZ$ (ii)

अथवा $m\angle ABC = m\angle XYZ$

(i) तथा च (ii) इति अवधाने निवेशयन्तः, वयम् एदपि लेखितुम् शक्नुमः

$$\angle ABC \cong \angle PQR \cong \angle XYZ$$

यदि द्वयोः कोणयोः परिमाणः समानः भवेत् तदा तौ सर्वाङ्गसमौ भवतः। यदि कोणौ सर्वाङ्गसमौ स्तः तदा तयोः परिमाणः अपि समानः भवति। कोणानां सर्वाङ्गसमता पूर्णतया तेषां समानतायाः उपरि आश्रीयते यथा हि रेखाखण्डानां स्थितेः विषये उक्तम् आसीत्। यत् द्वौ कोणौ सर्वाङ्गसमौ स्तः, द्वौ कोणौ सर्वाङ्गसमौ

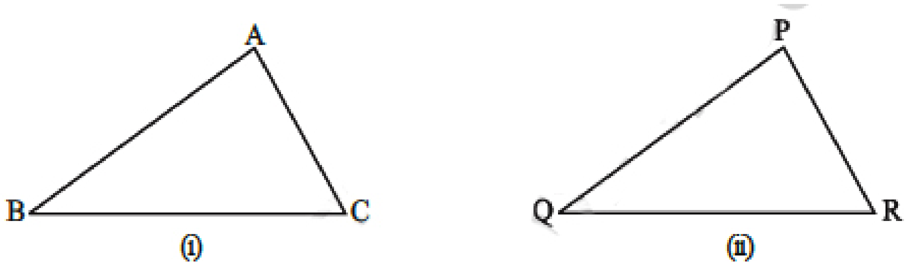
इति वक्तुम् तौ समानौ इति एव वदामः ।, वयं च लिखामः

$\angle ABC = \angle PQR$ (अर्थात् $\angle ABC \cong \angle PQR$)

7.5 त्रिभुजानां सर्वाङ्गसमता

अस्माभिः दृष्टं यत् रेखाखण्डौ सर्वाङ्गसमौ भवतः यदा तयोर्मध्ये एकः अपरस्य प्रतिलिपिः भवेत् । अनेन प्रकारेण, द्वौ कोणौ सर्वाङ्गसमौ भवतः यदि तयोः मध्ये एकः द्वितीयस्य प्रतिलिपिः स्यात् । वयम् एतां सङ्कल्पनाम् अधुना त्रिभुजेभ्यः अपि पश्यामः।

द्वे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे भवतः यदि तौ परस्परं प्रतिलिप्यौ स्तः एकं च अपरस्य उपरि स्थापनेन, तौ अन्योन्यं पूर्णतया आवृणुतः।



आकृतिः 7.6

ΔABC तथा च ΔPQR समानाकारौ समानपरिमाणौ च विद्येते । एतौ सर्वाङ्गसमौ स्तः । अतः एतौ निम्नप्रकारेण दर्शयिष्यामः

$\Delta ABC \approx \Delta PQR$

अस्य अयम् अर्थः अस्ति यत् यदि भवन्तः ΔPQR इति ΔABC अस्य उपरि स्थापयन्ति, तदा P इति A अस्य उपरि Q, इति B इत्यस्य उपरि तथा च R इति C इत्यस्य उपरि आयाति । इत्थमेव $\overline{PQ}$, $\overline{AB}$ अस्य अनुदिशि, $\overline{QR}$, $\overline{BC}$ अस्य अनुदिशि एवञ्च $\overline{PR}$, $\overline{AC}$ अस्य अनुदिशि आयान्ति । यदि प्रदत्ते सुमलने (correspondence) द्वौ त्रिभुजौ सर्वाङ्गसमौ स्तः तु तयोः सङ्गत-भागाः (अर्थात् कोणाः भुजाः च) समानाः जायन्ते। अतः एतयोः सर्वाङ्गसमत्रिभुजयोः,अस्माभिः प्राप्यते :

संगतानि शीर्षाणि A तथा च P, B तथा च Q, C तथा च R.

सङ्गताः भुजाः $\overline{AB}$ एवञ्च $\overline{PQ}$, $\overline{BC}$ तथा च $\overline{QR}$, $\overline{AC}$ एवञ्च $\overline{PR}$.

सङ्गताः कोणाः $\angle A$ एवञ्च $\angle P$, $\angle B$ एवञ्च $\angle Q$, $\angle C$ एवञ्च $\angle R$.

यदि भवन्तः ΔPQR इति ΔABC अस्य उपरि तथा आरोपयन्ति यत् P, B इत्यस्य उपरि आगच्छेत् तदा किम् अपरशीर्षाणि अपि यथायोग्यं सुमेलितानि भविष्यन्ति? एतत् आवश्यकं नास्ति? भवन्तः त्रिभुजानां प्रतिलिपीः स्वीकृत्य एतत् ज्ञातुं प्रयतन्ताम्। एतत् दर्शयति यत् त्रिभुजानां सर्वाङ्गसमतायाः विषये चर्चयन् न केवलं कोणानां परिमाणस्य भुजानां दीर्घतायाः च महत्त्वं विद्यते,अपितु शीर्षाणां सुमेलनम् अपि तद्वद् महत्त्वम् आधत्ते । उपरि प्रदत्तायां स्थितौ, सुमेलनम् एवम् अस्ति -

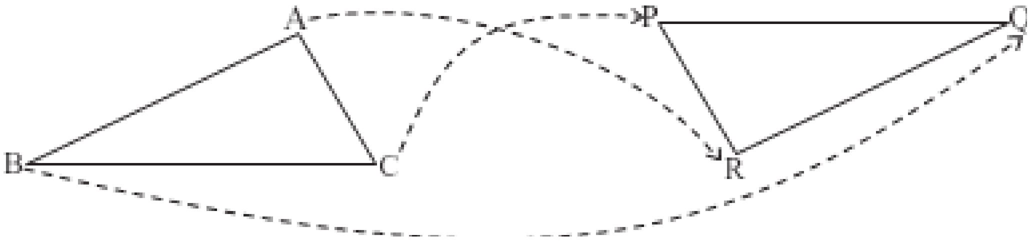
$A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow R$

वयम् एतत्, अनेन प्रकारेण अपि लिखितुं शक्नुमः $ABC \leftrightarrow PQR$

उदाहरणम् 1 यदि ΔABC तथा च ΔPQR सुमेलनम् $ABC \leftrightarrow RQP$ इत्यस्य अन्तर्गतं स्यात्,तदा ΔABC इत्यस्य तान् भागान् लिखन्तु ये निम्नस्य सङ्गताः स्युः।

(i) $\angle P$ (ii) $\angle Q$ (iii) $\overline{RP}$

समाधानम् एतां सर्वाङ्गसमतां सुष्ठु प्रकारेण अधिगन्तुम्, आयान्तु वयम् एकाम् आकृतिम् (आकृति 7.7) उपयुञ्ज्महे



आकृति 7.7

अत्र सुमेलनम् $ABC \leftrightarrow RQP$ अस्ति।

अर्थात् $A \leftrightarrow R$; $B \leftrightarrow Q$; $C \leftrightarrow P$.

अतः (i) $\overline{PQ} \leftrightarrow \overline{CB}$ (ii) $\angle Q \leftrightarrow \angle B$ (iii) $\overline{RP} \leftrightarrow \overline{AB}$

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

यदा द्वे त्रिभुजे,कल्पन्ताम् ABC तथा च PQR, दत्ते स्यात् तु तयोः मध्ये षड् सम्भवसुमेलनानि भवन्ति।तेषु द्वे सुमेलने स्तः

(i) $ABC \leftrightarrow PQR$ तथा च (ii) $ABC \leftrightarrow QRP$

द्वयोः त्रिभुजयोः कट-आऊट(cutouts)इति प्रयुज्य अन्यानि चत्वारि सुमेलनानि ज्ञायन्ताम्। किम् इमानि सर्वाणि सुमेलनानि सर्वाङ्गसमतां दर्शयन्ति ? अस्मिन् विषये विचारयन्तु।

प्रश्नावली 7.1

1. निम्न-कथनानि पूरयन्तु
   (a) द्वौ रेखाखण्डौ सर्वाङ्गसमौ भवतः यदि -------------।
   (b) द्वयोः कोणयोः मध्ये एकस्य परिमाणम् 70° अस्ति। द्वितीयकोणस्य परिमाणम् -------- अस्ति।
   (c) यदा वयम् $\angle A = \angle B$ इति लिखामः, वस्तुतः अस्माकम् अर्थः भवति ---------।
2. वास्तविकजीवनेन सम्बन्धितानां सर्वाङ्गसमानाम् आकाराणां किञ्चित् उदाहरणद्वयं यच्छन्तु।
3. यदि सुमेलनं $ABC \leftrightarrow FED$ अस्य अन्तर्गते $\Delta ABC \cong \Delta FED$ अस्ति तदा त्रिभुजस्य अन्तर्गतं सर्वान् सङ्गतद-सुमेलनभागान् लिखन्तु।
4. यदि $\Delta DEF \cong \Delta BCA$ स्यात्, तदा ΔBCA इत्यस्य तान् भागान् लिखन्तु ये निम्नानां संगताः भवेयुः
   (i) $\angle E$ (ii) $\overline{EF}$ (iii) $\angle F$ (iv) $\overline{DF}$

7.6 त्रिभुजानां सर्वाङ्गसमतायै प्रतिबन्धः

वयं निजदैनिकजीवने त्रिभुजाकार-संरचनां प्रतिरूपाणां च प्रयोगं कुर्मः। अतः एतत् ज्ञातुं श्रेयस्करं भविष्यति यत् द्वे त्रिभुजाकारौ आकृती कदा सर्वाङ्गसमे भविष्यतः। यदि भवतः टिप्पणीपुस्तिकायां त्रिभुजे निर्मिते स्तः भवन्तः प्रमाणितं कर्तुम् इच्छन्ति यत् किं ते आकृती सर्वाङ्गसमे स्तः।

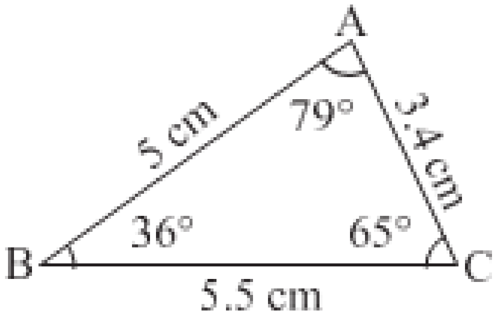
तदा प्रति वारं भवन्तः तयोः मध्ये एकं छित्वा अपरस्य उपरि अध्यारोपणविधेः (आरेपणम्) प्रयोगं नैव कर्तुं शक्नुवन्ति। एतद् अतिरिच्य यदि वयं सर्वाङ्गसमतां सम्यक् परिमाणैः निश्चितं कर्तुं शक्नुयाम तर्हि एतत् अधिकोपयोगी भविष्यति। अस्तु तथा कर्तुं प्रयत्नं कुर्मः।

एका क्रीडा

अप्पूमहोदयः टिप्पूमहोदयः च एकां क्रीडां क्रीडतः। अप्पूमहोदयेन एकं त्रिभुजम् (आकृतिः7.8) निर्मितम्।

सः प्रत्येकं भुजायाः दीर्घताम् अस्य च प्रत्येकं कोणस्य परिमाणम् अवधाने स्थापितवान्। टिप्पूमहोदयः एतत् सर्वं ध्यानेन न दृष्टम्। अप्पूमहोदय,टिप्पूमहोदयः आह्वयते (चुनौति देता है)यत् किं सः दत्तानां कतिपयसूचनानां आधारेण तस्य ΔABC इत्यस्य प्रतिलिपिं निर्मातुं शक्नोति।

अप्पूमहोदयेन दत्ताः सूचनाः प्रयुज्य टिप्पूमहोदयः ΔABC इत्यस्य सर्वाङ्गसमम् एकं त्रिभुज-निर्णस्य प्रयासम् अकरोत्। क्रीडा आरभते। ध्यानेन तयोः वार्तालापस्य तयोः च क्रीडायाः अवलोकनं कुर्वन्तु।

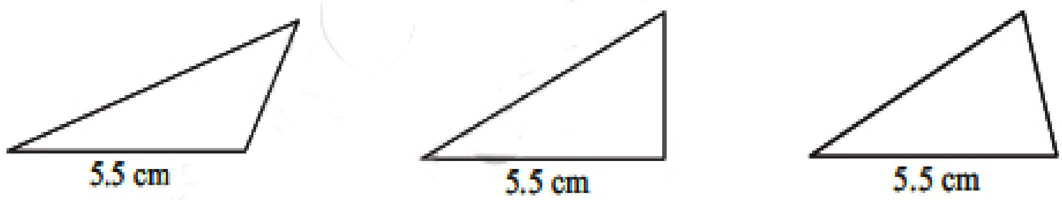


आकृतिः 7.8
(अप्पूवर्येण निर्मितं त्रिभुजम्)

SSS क्रीडा

अप्पूमहोदयः ΔABC इत्यस्य एका भुजा 5.5 से.मी.अस्ति।

टिप्पूमहोदयः अनया सूचनया अहं, नैकानि त्रिभुजानि निर्मातुं शक्नोमि (आकृतिः 7.9) किन्तु एतत् आवश्यकं नास्ति यत् तानि ΔABC इत्यस्य एव प्रतिलिप्यः स्युः। अहं यानि त्रिभुजानि निर्मामि तत् त्रिभुजं अधिककोणे (obtuse angled) अथवा समकोणे (Right angled) अथवा न्यूनकोणे (acute angled) भवितुं शक्नोति। अत्र कानिचित् उदाहरणानि दत्तानि सन्ति :



(अधिककोणः) (समकोणः) (न्यूनकोणः)

आकृतिः 7.9

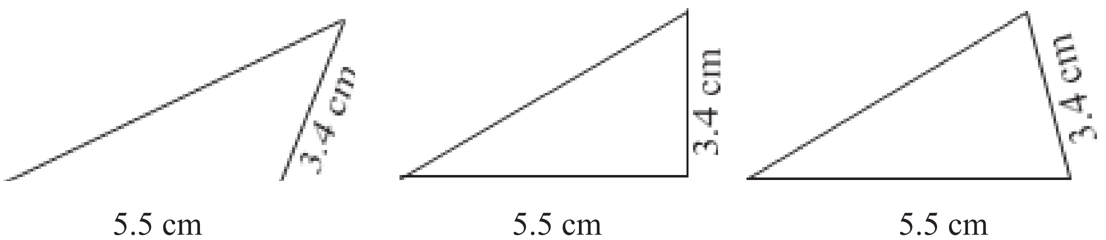
अहम् अन्य भुजाभ्यः स्वेच्छया दीर्घतायाः प्रयोगं कृतवान्। अनेन अहं 5.5 से.मी. आधारयुतानि बहूनि त्रिभुजानि प्राप्नोमि।

अतः प्रदत्तेन एकस्य भुजस्य दैर्घ्येण ΔABC इत्यस्य प्रतिलिपिनिर्माणं, मम कृते सम्भवः नास्ति।

अप्पूमहोदयः समीचीनम्। अहं तुभ्यम् एकस्याः अन्यभुजायाः दैर्घ्यं ददामि। ΔABC इत्यस्य द्वयोः भुजयोः दीर्घते (लम्बाईयाँ) 5.5 से.मी. तथा च 3.4 से.मी. स्तः।

टिप्पूवर्यः एषा सूचना अपि त्रिभुजं निर्मातुं पर्याप्ता नास्ति। अहं दत्तया सूचनया बहुनि त्रिभुजानि निर्मातुं शक्नोमि यत् ΔABC प्रतिलिपयः न भविष्यन्ति।

अत्र कानिचित् त्रिभुजानि दत्तानि सन्ति यानि मम वार्ताम् अङ्गीकुर्वन्ति।

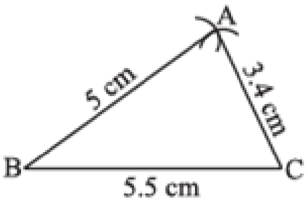


आकृतिः 7.10

भवतः त्रिभुजस्य सदृशां प्रतिलिपिं कश्चन अपि निर्मातुं न शक्नोति यदि केवलं द्वयोः भुजयोः दीर्घता दत्ता

स्यात्।

अप्पूमहोदयः सम्यक् अस्ति। अहम तुभ्यं त्रयाणां भुजानां परिमाणं ददामि। ΔABC मध्ये मम पार्श्वे $AB = 5$ से.मी., $BC = 5.5$ से.मी. तथा च $AC = 3.4$ से.मी.।



आकृतिः 7.11

टिप्पूवर्यः अहं विचारयामि यत् त्रिभुजस्य निर्माणम् अधुना सम्भवं स्यात्। अहम् इदानीं प्रयासं करोमि। आदौ अहं प्रतिरूपाकृतिम् (खाका) निर्मामि येन अहं सरलतया दीर्घताः स्मरामि। अहं 5.5 से.मी. $\overline{BC}$ आकर्षयामि।

'B' इति केन्द्रं मत्वा, अहं 5 से.मी.त्रिज्यायुतम् एकं चापम् आलिखामि। 'A' बिन्दुः अस्मिन् कुत्रचित् स्थितं स्यात्। 'C' इति केन्द्रं मत्वा 3.4 से.मी. त्रिज्यायुतम् एकं चापम् आलिखामि। 'A' बिन्दुः अस्मिन् कुत्रचित् चापे अपि स्थितं स्यात्। अर्थात् 'A' बिन्दुः आकृष्ट-चापे स्थितः अस्ति। अर्थात् 'A' द्वयोः चापयोः प्रतिच्छेदीबिन्दुः अस्ति।

अहम् अधुना A, B तथा च C इति त्रयाणां बिन्दूनां स्थितिं जानन्तु। अहो। अहम् एतान् मेलयित्वा ΔABC इति प्राप्तुं शक्नोमि (आकृतिः 11)।

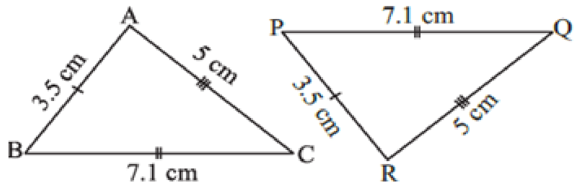
अप्पूमहोदयः बहु सम्यक्! अतः ΔABC प्रतिलिपिं निर्मातुम् (अर्थात् ΔABC इति सर्वाङ्गसमं एकं त्रिभुजं निर्मातुं) त्रयाणां भुजानां दीर्घतायाः आवश्यकता भवति। किं वयम् एतां स्थितिं भुजा-भुजा-भुजा (side-side-side) प्रतिबन्धं वक्तुम् अर्हामः।

टिप्पूवर्यः किमर्थं न वयम् एतं संक्षेपे, SSS इति प्रतिबन्धं कथयामः।

SSS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धः
यदि प्रदत्तस्य सुमेलनस्य अन्तर्गतम्, एकस्य त्रिभुजस्य तिस्रः भुजाः क्रमशः कस्यचित् अन्यस्य त्रिभुजस्य सङ्गतभुजानां समानाः स्युः तदा द्वे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे भवतः।

उदाहरणम् 2 त्रिभुज ABC तथा च PQR इत्यनयोः $AB = 3.5$ से.मी., $BC = 7.1$ से.मी., $AC =5$ से.मी., $PQ = 7.1$ से.मी., $QR = 5$ से.मी., तथा च $PR = 3.5$ से.मी.,अस्ति। (आकृतिः 7.1)। अवेक्षणं कुर्वन्तु यत् किं त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः अथवा न? यदि आम्, तदा सुमेलनसम्बन्धं सांकेतिकरूपेण लिखन्तु।

समाधानम् अत्र $AB = RP$ (= 3.5 cm),
$BC = PQ$ (= 7.1 से.मी.)
$AC = QR$ (= 5 से.मी.)



आकृतिः 7.12

एतत् दर्शयति यत् पूर्वं त्रिभुजस्य तिस्रः भुजाः, द्वितीयस्य त्रिभुजस्य तिसृणां भुजानां तुल्याः सन्ति। अतः SSS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धस्य अन्तर्गतं, द्वे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः। उपरि दत्तैः समानता-सम्बन्धैः,एतत् सारल्येन द्रष्टुं शक्यते।

यत् $A \leftrightarrow R$, $B \leftrightarrow P$ तथा च $C \leftrightarrow Q$.

अतः $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$

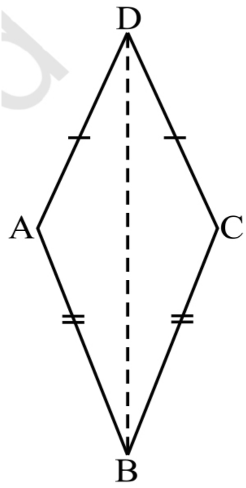
महत्त्वपूर्णं तथ्यम् सर्वाङ्गसमानां त्रिभुजानां नामसु अक्षराणां क्रमसङ्गतान् सम्बन्धान् दर्शयति। अनेन प्रकारेण, यदा भवन्तः $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$, लिखन्ति। भवद्भिः ज्ञायते यत् A, R इत्यस्य उपरि B,P इत्यस्य उपरि C, Q इत्यस्य उपरि, $\overline{AB}$, $\overline{RP}$ इत्यस्यां दिशि, $\overline{BC}$, $\overline{PQ}$ अस्यां दिशि $\overline{AC}$, $\overline{RQ}$ इत्यस्यां दिशि वर्तते।

उदाहरणम् 3 7.13 आकृत्यां, AD = CD तथा च AB = CB अस्ति।

(i) ΔABD तथा च ΔCBD मध्ये समानभागानां त्रियुग्मानि निर्मान्तु।

(ii) किम् $\Delta ABD \cong \Delta CBD$? किमर्थम् अथवा किमर्थं न ?

(iii) किम् BD, $\angle ABC$ इत्येतं समद्विभजति ? कारणं वदन्तु।



आकृतिः 7.13

समाधानम्

(i) ΔABD तथा च ΔCBD मध्ये समानभागानां त्रियुग्मानि सन्तिः

AB = CB (दत्तम् अस्ति)

AD = CD (दत्तम् अस्ति)

तथा च BD = BD (उभयत्र उभयनिष्ठम् अस्ति)

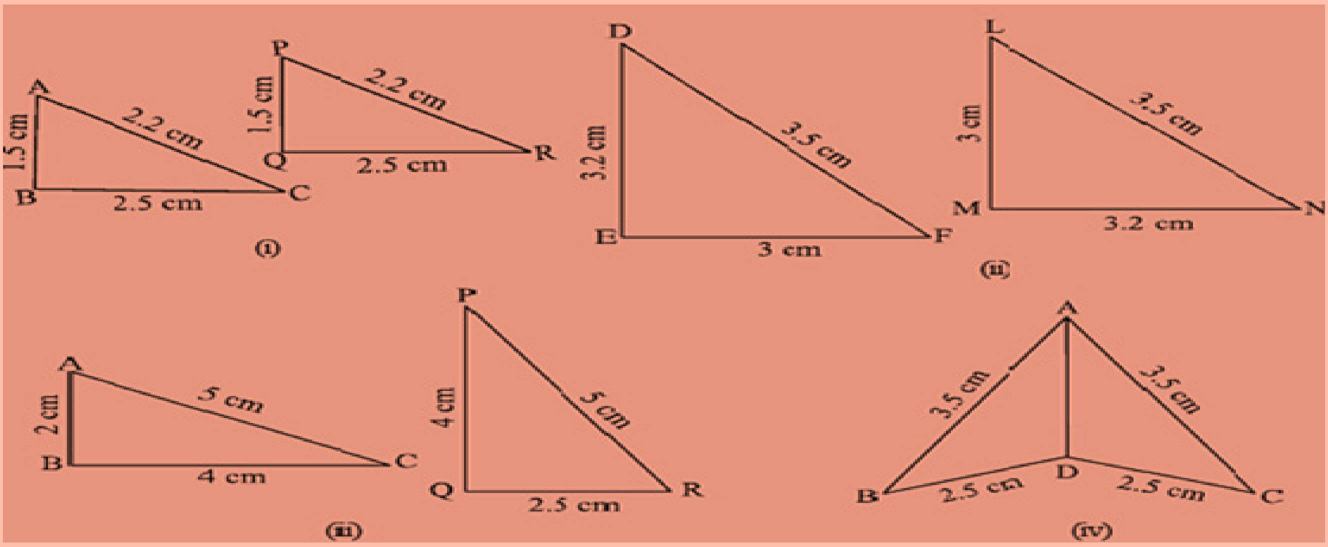
(ii) उपरि दत्तेन (i) द्वारा $\angle ABD \cong \angle CBD$ (SSS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धः)

(iii) $\angle ABD = \angle CBD$ (सर्वाङ्गसमानां त्रिभुजानां सङ्गतभागाः)

अतः BD, $\angle ABC$ इति समद्विभाजनं करोति।

एतान् कुर्वन्तु

1. आकृतिः7.14 मध्ये, त्रिभुजानां भुजानां दीर्घताः दर्शिताः सन्ति। SSS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धस्य उपयोगं कृत्वा उच्यतां यत् कतमः त्रिभुज-युग्मः सर्वाङ्गसमाः सन्ति ? सर्वाङ्गसमतायाः स्थित्याम् उत्तरं सांकेतिकरूपेण लिखन्तु।



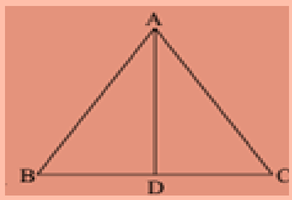
आकृतिः 7.14

2. 7.15 आकृत्यां मध्ये AB= AC तथा च D, BC इत्यस्य मध्यबिन्दुः अस्ति -

(i) ΔADB तथा च ΔADC मध्ये समानभागानां त्रियुग्मानि उच्यताम्।

(ii) किम् $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ अस्ति ? कारणं यच्छन्तु।

(iii) किम् $\angle B = \angle C$ अस्ति ?

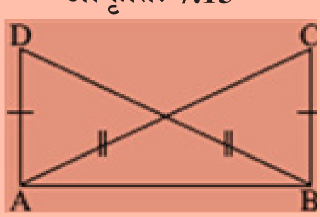


आकृतिः 7.15

3. 7.16 आकृत्यां मध्ये AC = BD तथा AD = BC च अस्ति।

निम्नलिखितकथनेषु कतमत् सत्यम् अस्ति ?

(i) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$



आकृतिः 7.16

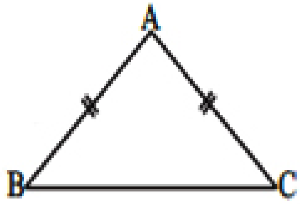
विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

ABC एकं समद्विबाहुत्रिभुजम् अस्ति यस्मिन्। AB = AC (आकृतिः7.17) अस्ति ΔABC इत्यस्य एकां प्रतिलिपिं स्वीकुर्वन्तु तथा च एनाम् अपि ΔABC इति नाम यच्छन्तु।

(i) ΔABC तथा च ΔACB मध्ये समानभागानां युग्मत्रयं निर्मान्तु।

(ii) किम् $\Delta ABC \cong \Delta ACB$ अस्ति ? किमर्थम् अथवा किमर्थं न ?

(iii) किम् $\angle B = \angle C$ अस्ति ? किमर्थम् अथवा किमर्थं न ? अप्पूमहोदयः टिप्पूवर्यः च गतक्रीडायां किञ्चित् परिवर्तनं कृत्वा पुनः क्रीडतः।



आकृतिः 7.17

SAS क्रीडा

अप्पूमहोदयः अधुना अहं त्रिभुजानां प्रतिलिपिनिर्माणक्रीडायाः नियमेषु परिवर्तनं करोमि।

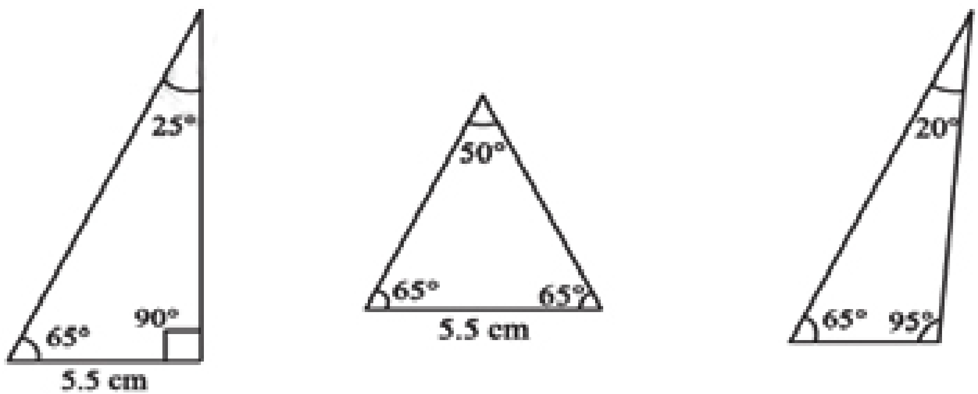
टिप्पूवर्यः सम्यक् अस्ति। क्रियन्ताम्।

अप्पूमहोदयः भवन्तः पूर्वम् एव जानन्ति यत् त्रिभुजस्य केवलं एकस्याः भुजायाः दीर्घता-प्रदानम् अपर्याप्तम् अस्ति।

टिप्पूवर्यः आम्।

अप्पूमहोदयः तस्यां स्थित्याम्, अहं वदामि यत् ΔABC मध्ये एका भुजा 5-5 से.मी. एकश्च कोणः 65°वर्तते।

टिप्पूवर्यः एतत्, पुनः त्रिभुजस्य निर्माणाय पर्याप्तम् नास्ति। अहम् एतादृशानि बहूनि त्रिभुजानि निर्मातुं शक्नोमि यानि भवतः सूचनां सन्तोषयेयुः, परन्तु तानि ΔABC इत्यस्य प्रतिलिपयः न स्युः। उदाहरणार्थम्, अहं कानिचित् त्रिभुजानि अत्र अददाम् (आकृतिः 7.18)A



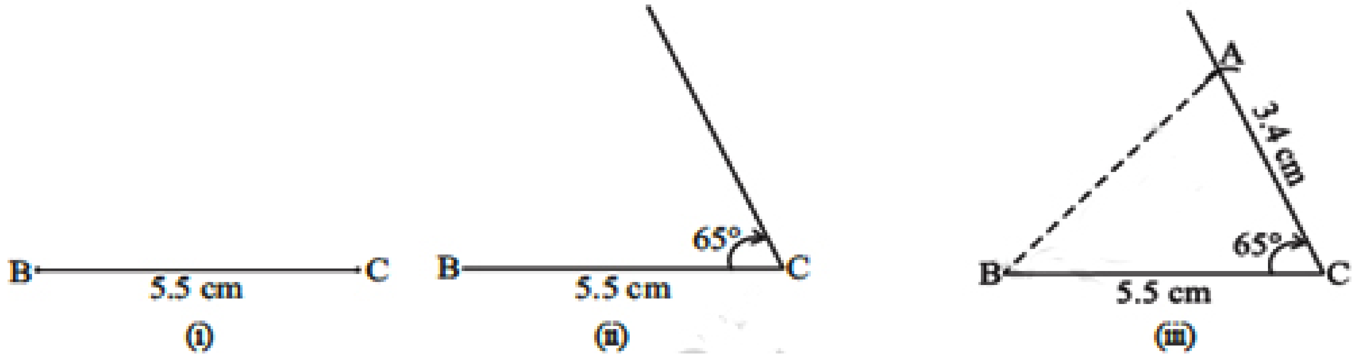
आकृतिः7.18

अप्पूमहोदयः अतः वयं किं कुर्मः?

टिप्पूवर्यः अस्माकं कृते इतोऽपि सूचनानाम् आवश्यकता वर्तते।

अप्पूमहोदयः तदानीम् अहं पूर्वतनकथने परिवर्तनं करोमि। ΔABC मध्ये, द्वयो भुजयोः दीर्घता 5.5 से.मी.एवञ्च 3.4 से.मी.अस्ति। तथा च एतयोः भुजयोः अन्तर्गतं 65° कोणः अस्ति।

टिप्पूवर्यः एषा सूचना मम साहाय्यं करिष्यति। अहं प्रयासं करिष्यामि। अहं सर्वप्रथमं 5.5 से.मी. दीर्घतावन्तं BC रेखाखण्डम् आलिखामि। (आकृतिः7.19 (i))। अधुना अहं 'C' अस्य उपरि 65°कोणं निर्मामि (आकृतिः 7.19 (ii))।



आकृतिः7.19

आम्, अहं 'A' इति बिन्दुं प्राप्तवान्। एषः C इत्यस्मात् आलिखितायाः अस्याः कोणीय-भुजस्य दिशि,'C'

इत्यस्मात् 3.4 से.मी. दूरं स्यात्। 'C' इति केन्द्रं स्वीकृत्य, अहं 3.4 से.मी.एकं चापं आकर्षामि। एतत् 650 इति कोणभुजं 'A'अस्य बिन्दोः उपरि छिनत्ति। अधुना अहं AB इति मेलयामि तथा च ΔABC इति प्राप्नोमि (आकृतिः 7.19 (ii))।

अप्पूमहोदयः भवद्भिः अत्र कोण-भुजा-कोणस्य उपयोगः कृतः यत्र कोणः भुजासु विद्यते।

टिप्पूवर्यः आम्। वयम् एतस्मै प्रतिबन्धाय किं नाम दास्यामः?

अप्पूमहोदयः एषः SAS प्रतिबन्धः अस्ति, किं भवन्तः अधिगतवन्तः?

टिप्पूवर्यः आम्। अवश्यमेव।

SAS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धः

यदि एकस्य सुमेलनस्य अन्तर्गतम्, एकस्य त्रिभुजस्य द्वौ भुजौ एवञ्च तयोः अन्तर्गतकोणः अपरस्य त्रिभुजस्य सङ्गतौ भुजौ तयोः च अन्तर्गतकोणस्य समानं स्यात्, तदा एतौ त्रिभुजौ सर्वाङ्गसमे भवतः।

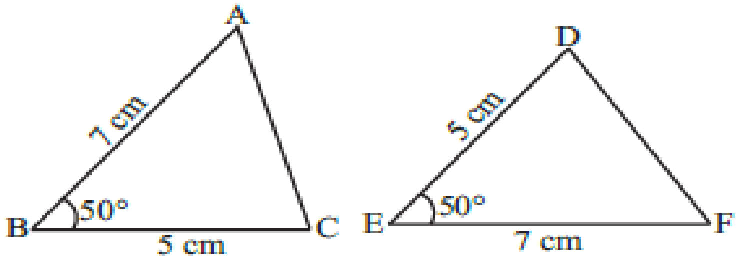
उदाहरणम् 4 द्वयोः त्रिभुजयोः केषाञ्चित् भागानां परिमाणानि अधः प्रदत्तानि सन्ति । SAS सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धम् उपयुज्य अवेक्षणं क्रियन्तां यत् त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः अथवा न ? यदि त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः तदा ते सांकेतिकरूपे लिखन्तु।

	ΔABC	ΔDEF
(a)	AB = 7 से.मी., BC = 5 से.मी., $\angle B = 50°$	DE = 5 से.मी., EF = 7से.मी., $\angle E = 50°$
(b)	AB = 4.5 से.मी., AC = 4 से.मी., $\angle A = 60°$	DE = 4 से.मी., FD = 4.5 से.मी., $\angle D = 55°$
(c)	BC = 6 से.मी., AC = 4 से.मी., $\angle B = 35°$	DF = 4 से.मी., EF = 6 से.मी., $\angle E = 35°$

(एतत् सर्वदैव अतीव उपयोगी भविष्यति यत् पूर्वं प्रतिरूपाकृतिं (खाका) निर्माय तेषां परिमाणानाम् अङ्कनं क्रियते ततः परं प्रश्नः दृश्यते।)

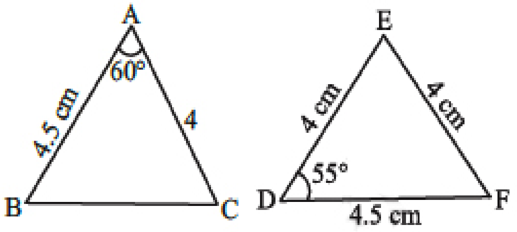
समाधानम्

(a) अत्र, AB = EF (= 7 से.मी.), BC = DE (= 5 से.मी.) तथा च अन्तर्गतं $\angle B$ = अन्तर्गतं $\angle E$ (= 50°).



आकृतिः 7.20

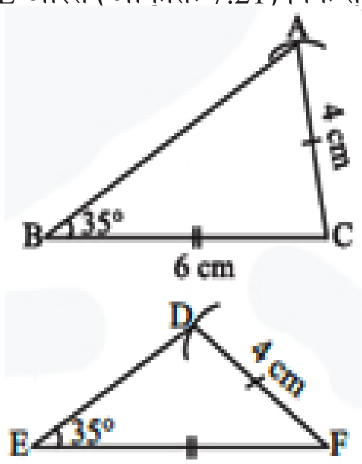
अनेन प्रकारेण, A ↔ F B ↔ E तथा च C ↔ D.



आकृातः 7.21

अतः, $\Delta ABC \cong \Delta FED$ (SAS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धस्य अन्तर्गतम्) (आकृतिः 7.20)

(b) अत्र, AB = FD तथा च AC = DE अस्ति (आकृतिः 7.21)। किन्तु अन्तर्गतं $\angle A \neq$ अन्तर्गतम् $\angle D$; अतः, वयं न वक्तुं शक्नुमः यत् त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः।



(c) अत्र, BC = EF, AC = DF तथा च $\angle B = \angle E$.

परन्तु $\angle B$, AC तथा च BC भुजानाम् अन्तर्गतं कोणः नास्ति।

एवमेव, $\angle E$, EF तथा च DF भुजानाम् अन्तर्गतं कोणः नास्ति।

अतः अत्र SAS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धस्य उपयोगं नैव कर्तुं शक्नुमः एवञ्च वयम् एतं निष्कर्षं नैव निस्कासयितुं शक्नुमः यत् द्वे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः अथवा न।

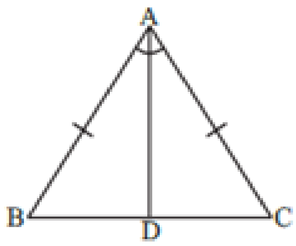
आकृतिः 7.22

उदाहरणम् 5 7.23 आकृत्यां, AB = AC अस्ति तथा च AD, $\angle BAC$ इत्यस्य समद्विभाजकः अस्ति।

(i) त्रिभुजम् ADB तथा च ADC मध्ये समानान् त्रियुग्मान् निर्मान्तु।

(ii) किम् $\Delta ADB \cong \Delta ADC$? कारणं यच्छन्तु।

(iii) किम् $\angle B = \angle C$? कारणं यच्छन्तु।



आकृतिः 7.23

समाधानम्

(i) समानाः त्रियुग्माः निम्नाः सन्ति -

AB = AC (दत्तं वर्तते)

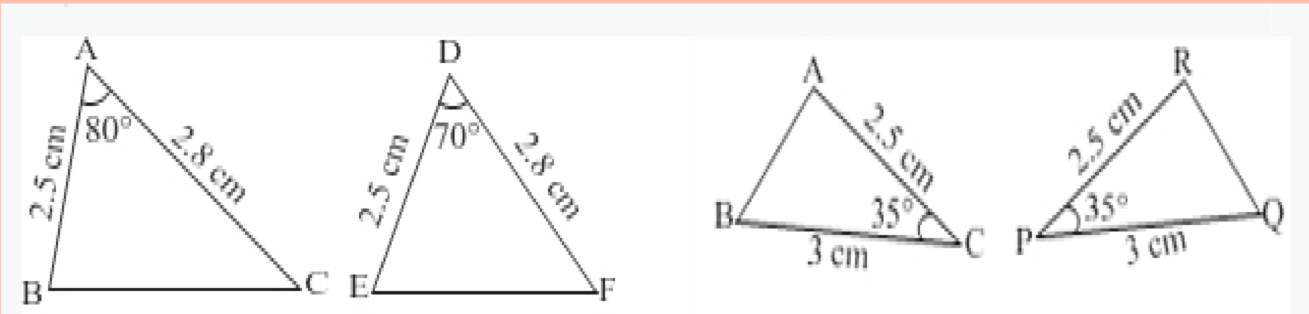
$\angle BAD = \angle CAD$ (AD, $\angle BAC$ इत्येतं समद्विभाजितं करोति) तथा च AD = AD (उभयनिष्ठम्)

(ii) आम्, $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ (SAS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धस्य अन्तर्गतम्)

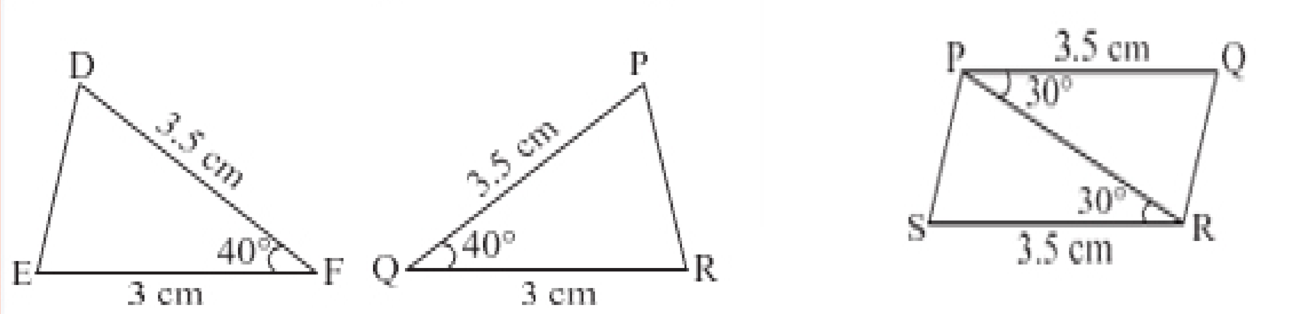
(iii) $\angle B = \angle C$ (सर्वाङ्गसमानां त्रिभुजानां सङ्गत-भागाः सन्ति।)

एतान् कुर्वन्तु

1. ΔDEF इति त्रिभुजस्य $\overline{DE}$ तथा च $\overline{EF}$ इत्यनयोः मध्ये अन्तर्गतः कतमतः कोणः अस्ति ?
2. SAS सर्वाङ्गसमता-प्रतिबिन्धं उपयुज्य भवन्तः $\Delta PQR \cong \Delta FED$ स्थापयितुं इच्छन्ति। एतत् दत्तम् अस्ति यत् PQ = FE तथा च RP = DF अस्ति। सर्वाङ्गसमतां स्थापयितुम् अन्यस्य कस्यचित् तथ्यस्य अन्यायाः सूचनायाः आवश्यकता भविष्यति ?
3. 7.24 आकृत्यां मध्ये, त्रिभुजानां युग्मेषु केषाञ्चन भागानां परिमाणाः अङ्किताः सन्ति। SAS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धस्य प्रयोगं कृत्वा, सर्वाङ्गसम-त्रिभुजस्य युग्माः सन्ति चेत् साङ्केतिक-रूपेण लिखन्तु।

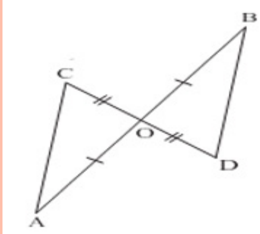


एतान् कुर्वन्तु



आकृतिः 7.24

4. 7.25 आकृत्याम् मध्ये, $\overline{AB}$ तथा च $\overline{CD}$, अन्योन्यम् O अस्य उपरि समद्विभाजितं कुवर्तः ।
   (i) द्वयोः त्रिभुजयोः AOC तथा च BOD मध्ये समानभागानां त्रियुग्मानं निर्मान्तु ।
   (ii) निम्नकथनेषु कतमत् कथनं सत्यम् अस्ति ?
   (a) $\Delta AOC \cong \Delta DOB$
   (b) $\Delta AOC \cong \Delta BOD$



आकृतिः 7.25

ASA क्रीडा

किं भवन्तः अप्पूमहोदयस्य त्रिभुजं निर्मातुं शक्नुवन्ति, यदि भवन्तः जानन्ति ।

(i) केवलम् अस्य एकं कोणम् ?

(ii) केवलम् अस्य द्वौ कोणौ ?

(iii) द्वौ कोणौ काञ्चन च भुजाम् ?

(iv) द्वौ कोणौ तयोर्मध्यस्थां च भुजाम् ?

उपरोक्तानां प्रश्नानां समाधाननिष्कासनस्य प्रयासाः अस्मान् प्रतिबन्धेन अवगमयन्ति ।

ASA सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धः
यदि एकस्मिन् सुमेलने, एकस्य त्रिभुजस्य द्वौ कोणौ तयोः अन्तर्गतः च भुजः, कस्यचित् अन्यत्रिभुजस्य द्वौ सङ्गत-कोणौ तयोः अन्तर्गताः च भुजाः समानाः स्युः, तदा ते त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे भवतः ।

उदाहरणम् 6 ASA सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धम् उपयुज्य $\Delta ABC \cong \Delta QRP$ स्थापनीयः अस्ति यदि एतत् दत्तम् अस्ति यत् BC = RP । एतां सर्वाङ्गसमतां स्थापयितुम् अन्येषां केषां तथ्यानाम् आवश्यकता अस्ति ?

समाधानम् ASA सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धार्थम् अस्माकं कृते दत्तेन कोणद्वयेन सह अन्तर्गतानां BC एवञ्च RP भुजानाम् आवश्यकता वर्तते ।

अतः अन्यानि आवश्यकतथ्यानि निम्नानि सन्तिः

$\angle B = \angle R$

तथा च $\angle C = \angle P$

उदाहरणम् 7 आकृतिः 7.26 मध्ये,किं भवन्तः ASA सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धस्य उपयेगं कृत्वा एतं निष्कर्षं निष्कासयितुं शक्नुमः यत् $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ अस्ति ?

समाधानम् द्वयोः त्रिभुजयोः AOC एवञ्च BOD मध्ये, $\angle C = \angle D$ (प्रत्येकम् 70°)

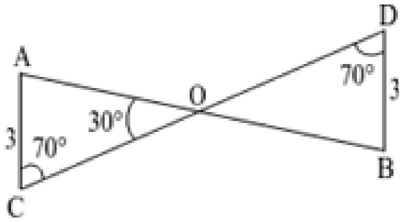
तथा च $\angle AOC = \angle BOD = 30°$ (शीर्षाभिमुखकोणः)

अतः $\angle A = 180° - (70° + 30°) = 80°$

(त्रिभुजस्य कोणानां योगः गुणधर्मस्य प्रयोगः)

अनेन प्रकारेण $\angle B = 180° - (70° + 30°) = 80°$

अतः अस्माकं पार्श्वे, $\angle A = \angle B$, $AC = BD$ तथा च $\angle C = \angle D$ अस्ति।



आकृतिः 7.26

अधुना, $\angle A$ एवञ्च $\angle C$ इत्यनयोः अन्तर्गतः भुजः AC तथा च $\angle B$ एवञ्च $\angle D$ इत्यनयोः अन्तर्गतः भुजः अस्ति।

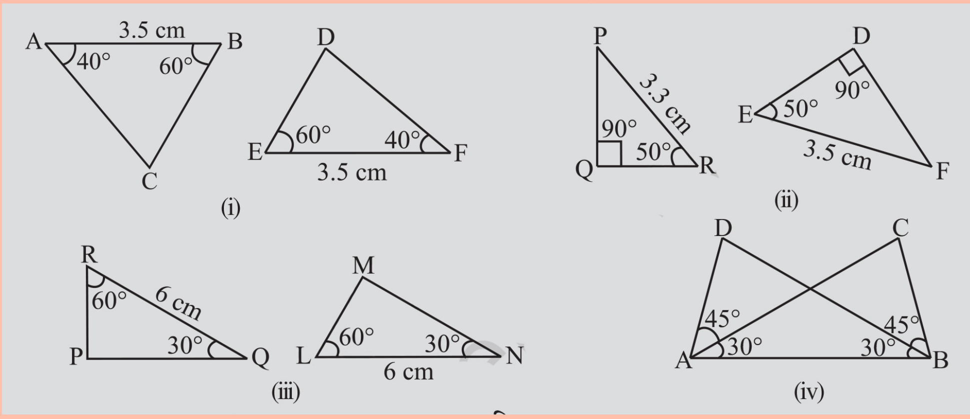
अतः ASA सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धेन $\Delta AOC \cong \Delta BOD$.

टिप्पणी

यदि एकस्य त्रिभुजस्य द्वौ कोणौ दत्तौ स्यातां तु भवन्तः सदैव त्रिभुजस्य तृतीयं कोणं ज्ञातुं शक्नुवन्ति।अतः यदा एकस्य त्रिभुजस्य द्वौ कोणौ एकः च भुजः कस्यचित् अन्यस्य त्रिभुजस्य द्वयोः सङ्गतकोणौ एकस्य भुजस्य समानौ स्याताम्, तदा भवन्तः एतत् 'कोणद्वयं अन्तर्गत-भुजः' संयुक्तायां सर्वाङ्गसमतायां रूपान्तरितं कर्तुं शक्नुवन्ति तदा च प्रतिबन्धस्य उपयोगं कर्तुम् अर्हन्ति।

एतान् कुर्वन्तु

1. ΔMNP कोणेषु, M तथा च N एतयोः अन्तर्गतं भुजः कः अस्ति ?
2. ASA सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धस्य उपयोगं कृत्वा भवन्तः $\Delta DEF \cong \Delta MNP$ स्थापयितुम् इच्छन्ति। भवतां कृते दत्तम् अस्ति यत् $\angle D = \angle M$ तथा च $\angle F = \angle P$। एतां सर्वाङ्गसमतां स्थापनार्थं कानि तथ्यानि आवश्यकानि सन्ति? (प्रतिरूपाकृतिं निर्मीय प्रयतन्ताम्)।
3. आकृतिः 7.27 मध्ये, त्रिभुजानां केषाञ्चित् भागानां परिमाणाः अङ्किताः वर्तन्ते। ASA सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धम् उपयुज्य कथ्यन्तां कतमतां त्रिभुजानां युग्माः सर्वाङ्गसमाः सन्ति। सर्वाङ्गसमतायाः स्थित्याम्, उत्तरं साङ्केतिक-रूपे लिखन्तु।



आकृतिः 7.27

4. द्वयोः त्रिभुजयोः केषाञ्चन भागानां परिमाणाः (परिमापाः) अधः दत्ताः सन्ति। ASA सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धस्य उपयोगं विधाय अवेक्षणं कुर्वन्तु यत् किम् एते त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः अथवा न। सर्वाङ्गसमतायाः स्थित्याम् उत्तरं सांकेतिकरूपेण लिखन्तु।

	ΔDEF	ΔPQR
(i)	$\angle D = 60°$, $\angle F = 80°$, DF = 5 से.मी.	$\angle Q = 60°$, $\angle R = 80°$, QR = 5 से.मी
(ii)	$\angle D = 60°$, $\angle F = 80°$, DF = 6 से.मी	$\angle Q = 60°$, $\angle R = 80°$, QP = 6 से.मी
(iii)	$\angle E = 80°$, $\angle F = 30°$, EF = 5 से.मी	$\angle P = 80°$, PQ = 5 से.मी, $\angle R = 30°$

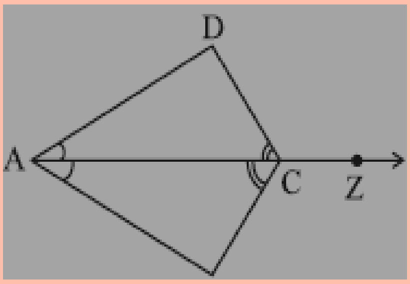
5. 7.28 आकृत्यां,किरणः AZ, $\angle DAB$ तथा च $\angle DCB$ एतौ कोणौ समद्विभाजितं करोति।

(i) त्रिभुजयोः BAC तथा च DAC समानभागानां त्रियुग्मान् वदन्तु।

(ii) किम् $\Delta BAC \cong \Delta DAC$ अस्ति? कारणं यच्छन्तु।

(iii) किम् AB = AD अस्ति ? कारणं यच्छन्तु।

(iv) किम् CD = CB अस्ति ? कारणं यच्छन्तु।



आकृतिः 7.28

7.7 समकोणत्रिभुजेषु सर्वाङ्गसमता

द्वयोः समकोणत्रिभुजयोः स्थित्यां सर्वाङ्गसमतां यथायोग्यं विशेषध्यानं दातव्यं भवति । एतादृशयोः त्रिभुजयोः, द्वौ समकोणौ पूर्वमेव समानौ भवतः। अतः सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धं सरलं जायते।

किं भवन्तः एकं ΔABC निग्मातुं शक्नुवन्ति यस्मिन् $\angle B = 90°$ भवेत् (आकृतिः 7.29 मध्ये दर्शितम् अस्ति) यदि

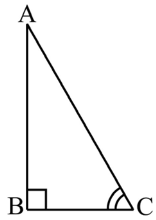
(i) केवलम् एका भुजः BC ज्ञातः भवेत् ?

(ii) केवलम् $\angle C$ ज्ञातं स्यात् ?

(iii) $\angle A$ एवञ्च $\angle C$ अनयोः विषये ज्ञानं स्यात् ?

(iv) भुजः AB तथा च BC ज्ञातं स्यात् ?

(v) कर्णः AC एवञ्च AB अथवा BC मध्ये एकः भुजः ज्ञातः स्यात् ?



आकृति 7.29

अस्य प्रतिरूपाकृतेः निर्माणस्य प्रयासं कुर्वन्तु। भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् (iv) तथा च (v) त्रिभुजनिर्माणे भवतां साहाय्यं कुरुतः। परन्तु स्थितिः (iv) साधारणतया SAS प्रतिबन्धमेव अस्ति। स्थितिः (v) किञ्चित् नवीना अस्ति। एतत् निम्नं प्रतिबन्धं प्रति अग्रे नयति।

RHS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धः

यदि एकस्य सुमेलनस्य अन्तर्गतं,कस्यचित् समकोणत्रिभुजस्य कर्णः एकः च भुजः क्रमशः कस्यचित् अपरस्य समकोणत्रिभुजस्य कर्णस्य एकस्य च भुजस्य समानं स्यात्,तदा ते त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः। वयम् एतां 'RHS सर्वाङ्गसमता' इति किमर्थम् कथयामः ?अस्मिन् विषये विचारयन्तु।

उदाहरणम् 8 त्रिभुजानां युग्मानां केषाञ्चित् भागानां परिमाणाः अधः दत्ताः सन्ति । RHS सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धस्य प्रयोगं कृत्वा उच्यतां किम् एते त्रिभुजयुग्माः सर्वाङ्गसमाः सन्ति अथवा न। सर्वाङ्गसमत्रिभुजाः सन्ति चेत् साङ्केतिक-रूपेण लिखन्तु।

	ΔABC	ΔPQR
(i)	$\angle B = 90°$, AC = 8 से.मी. AB = 3 से.मी.	$\angle P = 90°$, PR = 3 से.मी. QR = 8 से.मी.
(ii)	$\angle A = 90°$, AC = 5 से.मी. BC = 9 से.मी.	$\angle Q = 90°$, PR = 8 से.मी. PQ = 5 से.मी.

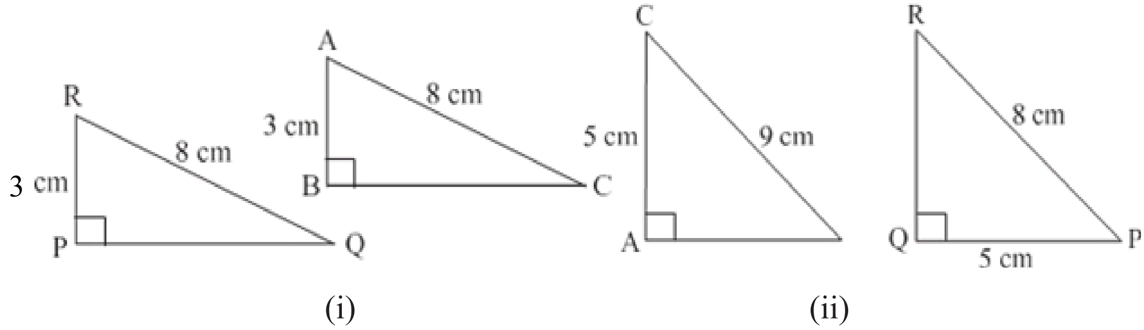
समाधानम्

(i) अत्र $\angle B = \angle P = 90°$,

कर्णः AC = कर्णः RQ (= 8 से.मी.) तथा च

भुजः AB = भुजा RP (= 3 से.मी.)

अतः $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ (RHS सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धस्य अन्तर्गतम्) [आकृतिः 7.30(i)]



आकृतिः 7.30

(ii) अत्र, $\angle A = \angle Q (= 90^{\circ})$ तथा च

भुजः AC = भुजः PQ (= 5 से.मी.)

किन्तु कर्णः $\overline{BC} \neq$ कर्णः PR [आकृतिः 7.30 (ii)]

अतः त्रिभुजं सर्वाङ्गसमं नास्ति।

उदाहरणम् 9 आकृतिः 7.31मध्ये, $DA \perp AB$, $CB \perp AB$ तथा च

AC = BD अस्ति।

(a) ΔABC तथा च ΔDAB मध्ये समानान् त्रियुग्मान् वदन्तु।

(b) निम्नेषु कतमत् कथनं सत्यम् अस्ति ?

(i) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$

समाधानम् समानभागानां त्रियुग्माः एते सन्ति।

$\angle ABC = \angle BAD (= 90^{\circ})$

AC = BD (दत्तम् अस्ति)

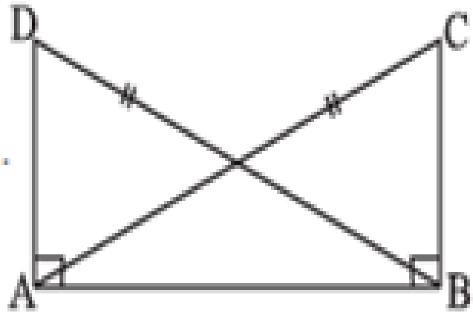
AB = BA (उभयनिष्ठभुजा)

अतः $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

(RHS सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धेन)

अतः कथनम् (i) सत्यम् अस्ति।

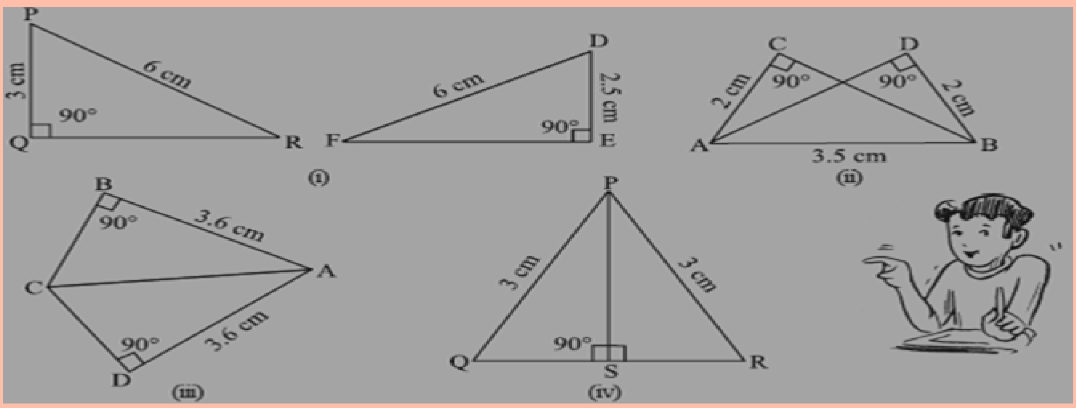
कथनम् (ii) सत्यं नास्ति यतोहि शीर्षेषु सुमेलनम् उचितं नास्ति।



आकृतिः 7.31

एतान् कुर्वन्तु

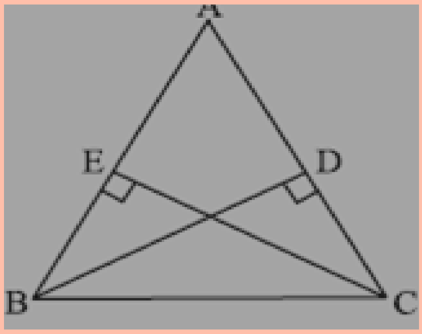
1.आकृतिः 7.32 मध्ये, त्रिभुजानां केषाञ्चित् भागानां परिमाणाः दत्ताः सन्ति। RHS सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धस्य प्रयोगं कृत्वा उच्यतां कतमाः त्रिभुजयुग्माः सर्वाङ्गसमाः सन्ति। सर्वाङ्गसमाः त्रिभुजाः सन्ति चेत् तान् साङ्केतिक-रूपेण अपि लिखन्तु।



आकृतिः 7.32

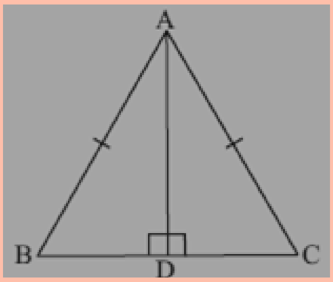
2. RHS सर्वाङ्गसमताप्रतिबन्धेन $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ स्थापनीयं वर्तते। यदि एतत् दत्तं भवेत् यत् $\angle B = \angle P = 90^\circ$ तथा च $AB = RP$ अस्ति तदा अन्यायाः कस्याः सूचनायाः आवश्यकता अस्ति ?

3. 7.33 आकृत्यां मध्ये BD एवञ्च CE, ΔABC शीर्षे लम्बे (लम्बशीर्षे) स्तः तथा च $BD = CE$.
   (i) ΔCBD एवञ्च ΔBCE मध्ये समानान् त्रियुग्मान् निर्दिशन्तु
   (ii) किम् $\Delta CBD \cong \Delta BCE$ अस्ति ? किमर्थम् अथवा किमर्थं न ?
   (iii) किम् $\angle DCB = \angle EBC$ अस्ति ? किमर्थम् अथवा किमर्थं न ?



आकृतिः 7.33

4. ABC, एकं समद्विबाहुत्रिभुजम् अस्ति यस्मिन् $AB = AC$ तथा च AD अस्य एकः शीर्षलम्बः अस्ति (आकृतिः7.34)।
   (i) ΔADB एवञ्च ΔADC मध्ये समानान् त्रियुग्मान् निर्दिशन्तु।
   (ii) किम् $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ अस्ति ? किमर्थम् अथवा किमर्थं न ?
   (iii) किम् $\angle B = \angle C$ अस्ति ? किमर्थम् अथवा किमर्थं न ?
   (iv) किम् $BD = CD$ अस्ति ? किमर्थम् अथवा किमर्थं न ?

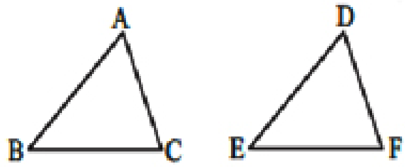


आकृतिः 7.34

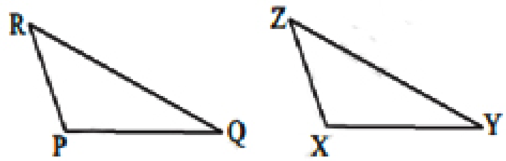
अधुना वयम् एतावत्पर्यन्तं दृष्टप्रतिबन्धानाम् उपरि आधारितानि कानिचन उदाहरणानि काञ्चन च प्रश्नान् द्रक्ष्यामः।

प्रश्नावली 7.2

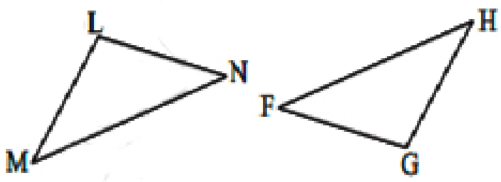
1. निम्नेषु भवन्तः कतमतान् सर्वाङ्गम-प्रतिबन्धान् प्रयोक्ष्यन्ति ?
   (a) दत्तं वर्तते - $AC = DF, AB = DE, BC = EF$
   अतः $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



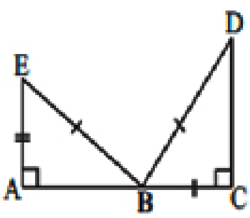
   (b) दत्तं वर्तते - $ZX = RP, RQ = ZY$
   $\angle PRQ = \angle XZY$
   अतः $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$



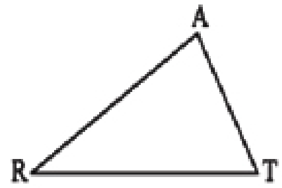
   (c) दत्तं वर्तते - $\angle MLN = \angle FGH$
   $\angle NML = \angle GFH$
   $ML = FG$
   अतः $\Delta LMN \cong \Delta GFH$

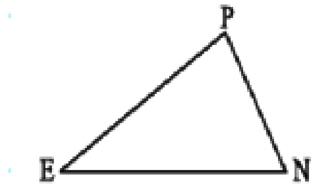


   (d) दत्तं वर्तते - $EB = DB$
   $AE = BC$
   $\angle A = \angle C = 90^\circ$
   अतः $\Delta ABE \cong \Delta CDB$



2. भवन्तः $\Delta ART \cong \Delta PEN$ दर्शयितुं वाञ्छन्ति,





(a) यदि भवन्तः SSS सर्वाङ्गसमतायाः प्रतिबन्धस्य प्रयोगं कुर्वन्ति तदा भवतां कृते दर्शयितुम् आवश्यकम् अस्ति -

(i) AR = (ii) RT = (iii) AT =

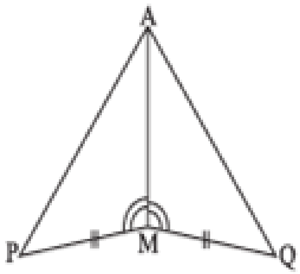
(b) यदि एतत् दत्तं स्यात् यत् $\angle T = \angle N$ एवञ्च भवद्भिः SAS प्रतिबन्धः प्रयोक्तव्यः वर्तते, तदा भवतां कृते आवश्यकम् अस्ति -

(i) RT = तथा च (ii) PN =

(c) यदि एतत् प्रदत्तं स्यात् यत् AT = PN एवञ्च भवद्भिः ASA प्रतिबन्धः प्रयोजनीयः अस्ति, तदा भवतां कृते आवश्यकम् अस्ति -

(i) ? = (ii)? =

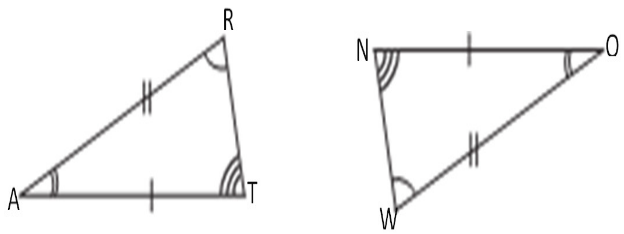
3. भवद्भिः $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$ इति दर्शनीयम् अस्ति।
निम्नचरणेषु, रिक्तानि कारणानि पूरयन्तु



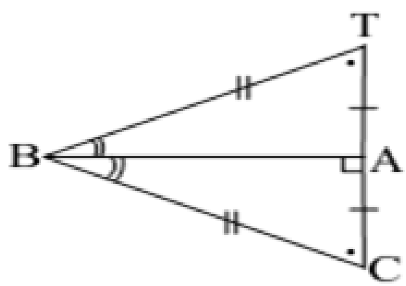
क्रमः	कारणानि
(i) PM = QM	(i) ...
(ii) $\angle PMA = \angle QMA$	(ii) ...
(iii) AM = AM	(iii) ...
(iv) $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$	(iv) ...

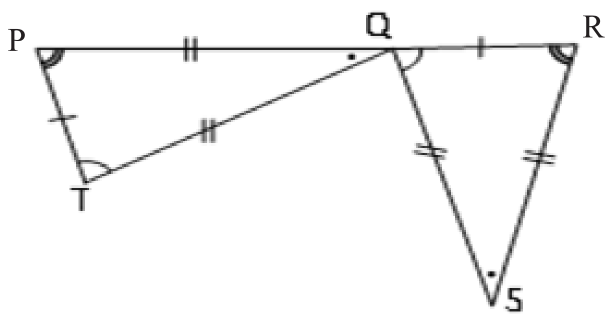
4. ΔABC मध्ये, $\angle A = 30°$, $\angle B = 40°$ एवञ्च $\angle C = 110°$
ΔPQR मध्ये, $\angle P = 30°$, $\angle Q = 40°$ तथा च $\angle R = 110°$
एकः विद्यार्थी वदति यत् AAA सर्वाङ्गसमताप्रबन्धेन $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ अस्ति। किम् एतत् कथनं सत्यम् अस्ति ? किमर्थम् अथवा किमर्थं न ?

5. आकृत्यां द्वे त्रिभुजे ART तथा च OWN सर्वाङ्गसमे स्तः ययोः सङ्गत-भागाः अङ्किताः सन्ति। वयं लेखितुं शक्नुमः $\Delta RAT \cong$?



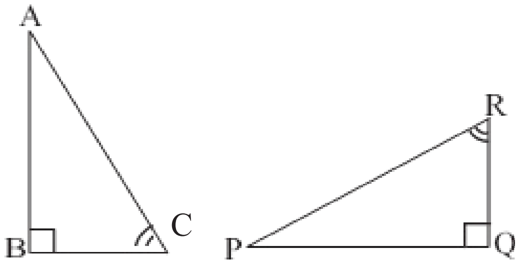
6. कथनानि पूरयन्तु :



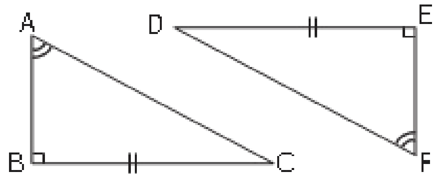


$\Delta BCA \cong$? **$\Delta QRS \cong$?**

7. एकस्मिन् वर्गाङ्किते कागदे, समानक्षेत्रफलयुते त्रिभुजे तथा निर्मान्तु यत्
   (i) त्रिभुजं सर्वाङ्गसमं भवेत्।
   (ii) त्रिभुजं सर्वाङ्गसमं न भवेत्।
   भवन्तः तयोः परिमापस्य विषये किं वक्तुं शक्नुवन्ति ?



8. आकृत्याम् एकं सर्वाङ्गसमभागानाम् अतिरिक्तं युग्मं निर्मान्तु येन ΔABC एवञ्च ΔPQR सर्वाङ्गसमे भवेताम्। भवद्भिः कः प्रतिबन्धः प्रयुक्तः?



9. चर्चयन्तु, किमर्थम् ?
   $\Delta ABC \cong \Delta FED$.

ज्ञानवर्धकः क्रियाकलापः (Enrichment Activity)

अस्माभिः दृष्टं यत् अध्यारोपणं तल-आकृतीनां सर्वाङ्गसमताम् अवेक्षितुम् एकः उपयोगी विधिः विद्यते। वयं रेखाखण्डानां,कोणानां त्रिभुजानां च सर्वाङ्गसमतायै प्रतिबन्धानां वर्णनं कृतवन्तः। अधुना भवन्तः एतां सङ्कल्पनां वर्धयित्वा तलस्य अन्याकृतीनां कृते प्रयत्नं कर्तुं शक्नुवन्ति

1. पृथक् पृथक् परिमाणस्य वर्गान् (cutout) विचारयन्तु। अध्यारोपणविधेः प्रयोगः वर्गाणां सर्वाङ्गसमतायै प्रतिबन्धं ज्ञातुं क्रियन्ताम्। कथं सङ्गत-समभागानां विषयः सर्वाङ्गसमस्य अन्तर्गतम् उपयोगी भवति ? किम् अत्र सङ्गत-भुजाः सन्ति। किम् अत्र सङ्गत-विकर्णाः सन्ति ?
2 यदि भवन्तः वृत्तं स्वीकुर्वन्ति तदा किं भवति ? द्वयोः वृत्तयोः सर्वाङ्गसमतायै कः प्रतिबन्धः अस्ति ? किं, भवन्तः पुनः अध्यारोपणविधिं प्रयोक्तुं शक्नुवन्ति, ज्ञायताम्।
3. एकं विषयम् उपयुज्य तलस्य अन्याकृतयः, यथा समषट्भुजः इत्यादिभ्यः प्रयत्नं क्रियन्ताम्।
4. एकस्य त्रिभुजस्य द्वे सर्वाङ्गसमप्रतिलिप्यौ स्वीकुर्वन्तु। कागदं पुटीकृत्य ज्ञायतां यत् किं तयोः शीर्षलम्बाः समानाः सन्ति। किं तयोः माध्यकाः समानाः सन्ति ? भवन्तः तयोः परिमापस्य क्षेत्रफलस्य च विषये किं वक्तुम् अर्हन्ति ?

अस्माभिः का चर्चा विहिता ?

1. सर्वाङ्गसमानि वस्तूनि परस्परं प्रतिलिप्यः जायन्ते।
2. अध्यारोपणविधिः तलाकृतीनां सर्वाङ्गसमतायाः अवेक्षणं करोति।
3. द्वे तलाकृत्यौ, कल्पन्ताम्, F_1 एवञ्च F_2 सर्वाङ्गसमे भवतः यदि F_1 इत्यस्य प्रतिरूप-प्रतिलिपिः F_2 इत्येतं पूर्णतया आवृणोति। वयम् एतत् $F_1 \cong F_2$ इत्यस्मिन् रूपे लिखामः।
4. द्वौ रेखाखण्डौ, कल्पन्ताम्, $\overline{AB}$ तथा च $\overline{CD}$, सर्वाङ्गसमौ भवतः यदि तयोः दीर्घता समाना स्यात्। वयम् एतत् $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ इत्यस्मिन् रूपे लिखामः। यद्यपि, साधारणताया एतत् $\overline{AB} = \overline{CD}$ इति लिखामः।
5. द्वौ कोणौ, कल्पन्ताम्, $\angle ABC$ तथा च $\angle PQR$ सर्वाङ्गसमौ भवतः यदि तयोः परिमाणः समानः स्यात्। वयम् एतत् $\angle ABC \cong \angle PQR$ अथवा $m\,\angle ABC = m\,\angle PQR$. इत्यस्मिन् रूपे लिखामः। यद्यपि, अभ्यासे एतं साधारणतया $\angle ABC = \angle PQR$ इति लिखामः।
6. द्वयोः त्रिभुजयोः SSS सर्वाङ्गसमता -
   एकस्य दत्तसुमेलनस्य अन्तर्गतम्, द्वे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः यदि एकस्य त्रिभुजस्य तिस्रः भुजाः कस्यचित् अन्यत्रिभुजस्य तिसृणां सङ्गत-भुजानां समानाः स्युः।

7. द्वयोः त्रिभुजयोः SAS सर्वाङ्गसमता -

एकस्य दत्तसुमेलनस्य अन्तर्गतम्, द्वे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः यदि एकस्य त्रिभुजस्य द्वौ भुजौ तयोः च अन्तर्गतः संगतकोणः, अन्यत्रिभुजस्य द्वयोः संगतभुजयोः तयोः च अन्तर्गतस्य संगतकोणस्य समानं स्यात्।

8. द्वयोः त्रिभुजयोः ASA सर्वाङ्गसमता -

एकस्य दत्तसुमेलनस्य अन्तर्गतम्, द्वे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः यदि एकस्य त्रिभुजस्य द्वौ कोणौ तयोः च अन्तर्गतः भुजः कस्यचित् अन्यत्रिभुजस्य द्वयोः संगतकोणयोः अन्तर्गतायाः च भुजस्य समानं स्यात्

9. द्वयोः त्रिभुजयोः RHS सर्वाङ्गसमता -

एकस्य प्रदत्तसुमेलनस्य अन्तर्गतम्,द्वे समकोणत्रिभुजे भवतः यदि कस्यचित् समकोणत्रिभुजस्य कर्णः एका च भुजा कस्यचित् अन्यस्य समकोणत्रिभुजस्य कर्णस्य एकस्य च भुजस्य समानं स्यात्।

10. द्वयोः त्रिभुजयोः AAA सर्वाङ्गसमता नास्ति

एतत् आवश्यकं नास्ति यत् समान-सङ्गत-कोणानां द्वे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः। एतादृशेषु सुमेलनेषु, एतेषु एकः, अन्यस्य वर्धिता प्रतिलिपिः भवितुम् अर्हति। (ते सर्वाङ्गसमे भविष्यतः यदि ते अन्योन्यं सदृश्यौ प्रतिलिप्यौ स्याताम्)।